

## Условие

### Задача 2 (вариант 1)

Да се докаже, че е изпълнимо множеството от следните формули:

$$\begin{aligned} & \exists x \exists y (p(x, y) \ \& \ \neg p(y, x)) \\ & \forall x \exists y (\neg p(x, y) \ \& \ \neg p(y, x)) \\ & \exists x \exists y (p(x, y) \ \& \ p(y, x)) \end{aligned}$$

### Задача 2 (вариант 2)

Да се докаже, че е изпълнимо множеството от следните формули:

$$\begin{aligned} & \exists x \exists y (p(x, y) \ \& \ \neg p(y, x)) \\ & \exists x \exists y (\neg p(x, y) \ \& \ \neg p(y, x)) \\ & \forall x \exists y (p(x, y) \ \& \ p(y, x)) \end{aligned}$$

## Решения

Примерните решения са с интерпретации чрез графи. Допускат се и решения чрез подредби в числови структури, геометрични интерпретации и др. В тези случаи, обосновките за изпълнимост на формулите са подобни ...

### решение за вариант 1

За решение използваме насочения граф  $\langle V, E \rangle$ , където  $V = \{ a, b, c \}$  и  $E = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle \}$ . Решение е структурата  $\mathcal{A} = (V, p)$ , където

$$p^{\mathcal{A}}(x, y) \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in E.$$

- Първата формула се изпълнява от  $\mathcal{A}$ , при  $x = a$  и  $y = b$ , т.к.  $\langle a, b \rangle \in E$ , но  $\langle b, a \rangle \notin E$ ;
- втората формула се изпълнява от  $\mathcal{A}$ , като за всяко  $x$  избираме  $y = x$  и така нито  $\langle x, y \rangle \in E$ , нито  $\langle y, x \rangle \in E$ ;
- третата формула се изпълнява от  $\mathcal{A}$ , при  $x = a$  и  $x = c$ , т.к.  $\langle a, c \rangle \in E$  и  $\langle c, a \rangle \in E$ .

### решение за вариант 2

За решение използваме насочения граф  $\langle V, E \rangle$ , където  $V = \{ a, b, c \}$  и  $E = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$ . Решение е структурата  $\mathcal{A} = (V, p)$ , където

$$p^{\mathcal{A}}(x, y) \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in E.$$

- Първата формула се изпълнява от  $\mathcal{A}$ , при  $x = a$  и  $y = b$ , т.к.  $\langle a, b \rangle \in E$ , но  $\langle b, a \rangle \notin E$ ;

- втората формула се изпълнява от  $\mathcal{A}$ , при  $x = a$  из  $y = c$ , т.к. нито  $\langle a, c \rangle \in E$ , нито  $\langle c, a \rangle \in E$ ;
- третата формула се изпълнява от  $\mathcal{A}$ , като за всяко  $x$  избираме  $y = x$  и така и  $\langle x, y \rangle \in E$  и  $\langle y, x \rangle \in E$ .

## Критерии за оценяване

За правилно дефинирана структура - **1т.**

За всяка формула, която се изпълнява от структурата - по **1т.** (общо **3т.**)

За цялостно решение (ако структурата изпълнява и трите формули) - **1т.**