

ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА ЗАВЪРШВАНЕ НА  
ОБРАЗОВАТЕЛНО-КВАЛИФИКАЦИОННАТА СТЕПЕН  
"БАКАЛАВЪР"  
СПЕЦИАЛНОСТ "ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА"  
март 2007

**Задача 1**

Да се намерят реалните решения на уравнението:

$$y'' + 4y = 4x^2 + \sin 2x.$$

**Задача 2**

Да се изчисли с помощта на теоремата на резидуумите интегралът:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin 2x dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

**Задача 3**

Спрямо ортонормиран базис  $e_1, e_2, e_3$  на евклидовото пространство е зададен линеен оператор  $\Psi : U \rightarrow U$  с матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намери ортонормиран базис на пространството  $U$ , в който матрицата  $D$  на оператора  $\Psi : U \rightarrow U$  е диагонална, както и тази матрица  $D$ .

б) Да се докаже, че за всеки ненулев елемент  $x \in U$  е изпълнено

$$\left| \frac{(\Psi(x), x)}{(x, x)} \right| \leq 9,$$

където  $(z, y)$  е скаларното произведение на елементите  $z$  и  $y$ .

в) Да се намери матрицата на оператора  $\Psi^{2006}$  и да се докаже, че числото

$$\frac{(\Psi(x), x)}{(x, x)}$$

не зависи от ненулевия елемент  $x \in U$ .